$x^2-4x+1=0$ の大きい解が α、小さい解が β なので

$\alpha=2+\sqrt{3}$　　$\beta=2-\sqrt{3}$

また、解と係数の関係より、$\alpha+\beta=4$　　$\alpha\beta=1$

(1) $S_1=\alpha+\beta=4$

$S_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\times1=14$

$S_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\times1\times4=52$

$a_n=x^n+y^n$ の形の漸化式を作る方法は有名。覚えよう。(cf) 2017 文理、1997 文 など。

$$\begin{aligned}S_n=\alpha^n+\beta^n&=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-\alpha\beta^{n-1}-\beta\alpha^{n-1}\\&=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})\\&=4\times S_{n-1}-1\times S_{n-2}\end{aligned}$$

$\therefore$ $S_n=4S_{n-1}-S_{n-2}$ //

(2) まず、$S_n>0$ を示す。

$\alpha=2+\sqrt{3}>0$　　$\beta=2-\sqrt{3}>0$　なので、

$S_n=\alpha^n+\beta^n>0$

次に、S_n が整数であることを示す。有名な証明

S_n が整数であることを、数学的帰納法で示す。

(i) $S_1=4$　$S_2=14$ より確かに整数。

(ii) S_k、S_{k+1} が整数だと仮定する。

(iii) $S_{k+2}=4S_{k+1}-S_k$ に対し、

S_{k+1}、S_k が整数なので、S_{k+2} も整数。

よって、自然数 n に対し、S_n が整数になる。

↑これは、有名な証明、覚えよう。

東大合格 敬天塾
©敬天塾　著作権者に無断で文章や画像等の著作物を転載することは、法律で禁止されています。